

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_{n-1} = 3^{2n-3} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1. Calculer u_0 et u_3 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Exercice 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$$

1. On suppose dans cette question que $u_0 = 0$.
 - (a) Calculer les trois premiers termes de (u_n) .
 - (b) Conjecturer une formule donnant l'expression de u_n en fonction de n seulement.
 - (c) Démontrer cette formule.
2. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$.
 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n + n.$$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

Exercice 4 :

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1, \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq 2.$$

Exercice 5 :

Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Calculer H_1 , H_2 et H_3 .
2. Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a) \quad H_n = n - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right)$$

$$(b) \quad H_1 + H_2 + \cdots + H_n + n = (n+1)H_n$$

Exercice 6 :

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 3, \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad v_n = u_{n-1} - u_n.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 Préciser la raison et le premier terme.
- (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 8 :

Soient (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 5}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2^n + 4n - 5}{4}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = u_n + v_n$ est géométrique, puis calculer la somme :

$$A = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}.$$

2. Montrer que la suite (b_n) définie par $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique, puis calculer la somme :

$$B = b_0 + b_1 + \cdots + b_{10}.$$

3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} \quad \text{et} \quad T = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}.$$

Exercice 9 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = 2^n - 7n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 10 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}.$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 5.$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 5}.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.
- (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- (c) Calculer la somme :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{10}.$$

Exercice 11 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1}.$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \neq 1.$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}.$$

- (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.
- (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- (c) Calculer, en fonction de n , la somme :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}.$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 0.$$

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
- (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- (c) Calculer, en fonction de n , la somme :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
 (b) Écrire v_n en fonction de n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = u_n.$$

- (b) Écrire u_n en fonction de n .

Exercice 14 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n^2 + n}{3}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n .
3. En déduire que la suite (u_n) est arithmétique.